Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2 : Correction

Exercice 3. Autour des matrices nilpotentes (*d'après EPITA PT 2024*)

Dans ce problème on s'intéresse aux matrices nilpotentes. Dans une première partie on étudie un exemple, dans la seconde on démontre différentes propriétés concernant les matrices nilpotentes, et enfin, dans une dernière partie on s'intéresse à l'exponentielle d'une matrice nilpotente.

On définit les notations suivantes :

– $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans $\mathbb{R}$.
– $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
– I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
– On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définitions : Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = 0_n$, on dit que la matrice N est **nilpotente**. Le plus petit entier p vérifiant $N^p = 0_n$ est appelé **indice de nilpotence** de la matrice N.

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I - Étude d'une matrice nilpotente

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q20. La matrice A est-elle inversible ?

On remarque que la troisième colonne de A vaut trois fois la seconde donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.

Q21. Montrer que A est nilpotente. On précisera son indice de nilpotence.

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \neq 0_3$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$ donc $\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice } 3}$.

Q22. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(X_1)$ où X_1 est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à préciser, que l'on choisira de sorte que sa 3$^{\text{e}}$ coordonnée soit 1.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(A)$ si et seulement si $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, *i.e.*

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 5x + 2y + 6z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_3}{\overset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3}{\iff}} \begin{cases} -x = 0 \\ x = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -3z \end{cases}$$

Ainsi un élément de $\mathrm{Ker}(A)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ -3z \\ z \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}}$.

Q23. Soit $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AX_2 \in \mathrm{Ker}(A)$.

Méthode 1 : On calcule $AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 \in \mathrm{Ker}(A)$ d'après la question précédente.

Méthode 2 : On calcule $A \times AX_2 = A^2 X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en réutilisant l'expression de A^2 obtenue en **Q21**.

Ainsi $\boxed{AX_2 \in \mathrm{Ker}(A)}$.

Q24. Déterminer un vecteur $X_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $AX_3 = X_2$.

Soit $X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX_3 = X_2$, *i.e.*

$$\begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ 5x + 2y + 6z = 1 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_3}{\overset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3}{\iff}} \begin{cases} -x = -1 \\ x = 1 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y + 3z = -2 \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, le vecteur $\boxed{X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ convient}}$.

Q25. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons d'abord que cette famille est libre. Soit des réels α, β et γ tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. En utilisant les coordonnées de ces trois vecteurs, on obtient

$$\begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ -3\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (X_1, X_2, X_3) \text{ est libre}}$.

De plus, cette famille est constituée de trois vecteurs et on sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc il s'agit d'une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^3}$.

Q26. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

D'après **Q22**, $AX_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$; d'après **Q23**, $AX_2 = X_1$, et par définition de X_3, $AX_3 = X_2$, ce qui donne $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Partie II - Quelques propriétés des matrices nilpotentes

Inversibilité, matrices triangulaires

Q27. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que si M est nilpotente alors M n'est pas inversible.

Soient $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et p son indice de nilpotence. En particulier, $N^p = 0_n$.
Supposons par l'absurde que N est inversible. Alors en multipliant l'égalité précédente par $(N^{-1})^{p-1}$, il reste $N = 0_n$, ce qui est manifestement en contradiction avec le caractère inversible de N.
Ainsi $\boxed{\text{une matrice nilpotente n'est pas inversible}}$.

Q28. Soient $n \geqslant 2$ et $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que J_n n'est pas inversible et qu'elle n'est pas nilpotente.

- Tout d'abord, comme J_n a toutes ses colonnes égales, $\boxed{J_n \text{ n'est pas inversible}}$.
- En calculant les premières puissances de J_n et par récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J_n^k = n^{k-1} J_n \neq 0_n$ donc $\boxed{J_n \text{ n'est pas nilpotente}}$.

Q29. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieur à diagonale nulle (c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $i \geqslant j \implies m_{i,j} = 0$).
En considérant $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est M, montrer par récurrence que la propriété « $\forall i \in [\![1\,;k]\!]$, $\varphi^k(e_i) = 0$ » est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$.
En déduire que $M^n = 0_n$.

- Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Montrons par récurrence sur k la propriété $\mathcal{P}_k$: « $\forall i \in [\![1\,;k]\!]$, $\varphi^k(e_i) = 0$ ».

Initialisation : On a $\varphi^1(e_1) = \varphi(e_1) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car il s'agit de la première colonne de M qui est nulle puisque M est triangulaire supérieure stricte. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \geqslant 1$. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie. Soit $i \in [\![1\,;k+1]\!]$. Deux cas :

- Si $i \leqslant k$, alors $\varphi^{k+1}(e_i) = \varphi(\varphi^k(e_i)) \overset{\mathcal{P}_k}{=} \varphi(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- Si $i = k+1$, alors $\varphi^{k+1}(e_{k+1}) = \varphi^k(\varphi(e_{k+1}))$. Or comme la matrice M est triangulaire supérieure à diagonale nulle, on a $\varphi(e_{k+1}) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. D'où, par hypothèse de récurrence et par linéarité de φ^k, $\varphi^k(\varphi(e_{k+1})) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

On a ainsi montré que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$ et tout $i \in [\![1\,;k]\!]$, $\varphi^k(e_i) = 0$.

- En particulier, pour $k = n$, on obtient que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\varphi^n(e_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, cela signifie que φ^n est l'endomorphisme nul. Or la matrice canoniquement associée à φ^n est M^n, d'où $\boxed{M^n = 0_n}$, *i.e.* M est nilpotente.

Indice de nilpotence

Q30. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence p. Justifier qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, puis montrer alors que la famille $(X, MX, \dots, M^{p-1}X)$ est libre.

- Par définition p est le plus petit entier tel que $M^p = 0_n$, par conséquent $M^{p-1} \neq 0_n$ et en particulier il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
- Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que $\lambda_0 X + \lambda_1 MX + \dots + \lambda_{p-1} M^{p-1} X = 0_{\mathbb{R}^n}$. En multipliant cette égalité à gauche par M^{p-1}, on obtient $\lambda_0 M^{p-1} X + \lambda_1 M^p X + \dots + \lambda_{p-1} M^{2(p-1)} X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Or M est nilpotente d'indice p donc pour tout $k \geqslant p$, $M^k = 0_n$. Il ne reste donc que $\lambda_0 M^{p-1} X = 0_{\mathbb{R}^n}$, d'où $\lambda_0 = 0$ car $M^{p-1}X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ d'après le point précédent.

On procède de même en multipliant par M^{p-2} et on obtient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite. Finalement $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ donc $\boxed{\text{la famille } (X, MX, \dots, M^{p-1}X) \text{ est libre}}$.

Q31. En déduire que l'indice de nilpotence vérifie l'inégalité $p \leqslant n$.

Soit M nilpotente d'indice p et supposons par l'absurde que $p > n$. D'après la question précédente, la famille $(X, MX, \dots, M^{p-1}X)$ est libre. Or on sait qu'une famille libre de $\mathbb{R}^n$ contient au maximum $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ vecteurs. Comme on a supposé $p > n$, on aboutit à une contradiction. Ainsi nécessairement $\boxed{p \leqslant n}$.

Q32. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, $M^n = 0_n$.

Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et p son indice de nilpotence. D'après la question précédente, $p \leqslant n$, *i.e.* $n - p \geqslant 0$ donc $M^n = M^p \times M^{n-p} = 0_n \times M^{n-p} = \boxed{0_n}$.

Q33. Montrer que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ alors la matrice $U = \mathrm{I}_n + N$ est inversible et $U^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k$.

Méthode : Comme l'inverse est proposé, on vérifie que $U \times U^{-1} = \mathrm{I}_n$.
Soient $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et $U = \mathrm{I}_n + N$. On a

$$\begin{aligned}
U \times \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k &= (\mathrm{I}_n + N)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^{k+1} && \textit{distributivité} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} N^j && j = k+1 \textit{ dans la seconde} \\
&= N^0 + (-1)^{n-1}N^n && \textit{télescopage / simplification} \\
&= \mathrm{I}_n. && \textit{question précédente}
\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{U \text{ est inversible et } U^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k}$.

Stabilité par somme et produit

Q34. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?

- Par calcul, on a directement $\boxed{B^2 = 0_2 \text{ et } C^2 = 0_2}$ donc $B, C \in \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$.
- On a $B+C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ d'où $(B+C)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq 0_2$. Ainsi $B+C \notin \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ (car d'après **Q31** l'indice de nilpotence ici vaudrait au maximum 2). En particulier $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ n'est pas stable par combinaison linéaire donc $\boxed{\mathcal{N}_2(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$.

Q35. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $MN \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$.

Soient $M, N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. En particulier, d'après **Q32**, $M^n = N^n = 0_n$. De plus, comme M et N commutent, on a $(MN)^n = M^n \times N^n = 0_n \times 0_n = 0_n$ donc $\boxed{MN \text{ est nilpotente}}$.

Q36. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$.

Soient $M, N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. Comme M et N commutent, d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(M+N)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}M^k N^{2n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}M^k N^{2n-k} + \sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{k}M^k N^{2n-k}.$$

Dans la dernière somme, on a toujours $k \geqslant n$ donc $M^k = 0_n$, et dans l'avant-dernière $2n - k \geqslant n$ donc $N^{2n-k} = 0_n$. Ainsi $(M+N)^{2n} = 0_n$ donc $\boxed{MN \text{ est nilpotente}}$.

Partie III - Exponentielle de matrices nilpotentes

Pour $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, on définit l'exponentielle de M comme la matrice $\exp(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$.

Q37. Vérifier que $\exp(0_n) = \mathrm{I}_n$.

On a $0_n^0 = \mathrm{I}_n$ puis, pour tout $k \geqslant 1$, $0_n^k = 0_n$ donc $\exp(\mathrm{I}_n) = \frac{1}{0!}\mathrm{I}_n + 0_n = \boxed{\mathrm{I}_n}$.

Q38. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier que $T \in \mathcal{N}_3(\mathbb{R})$ et montrer que $\exp(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par calculs, on a $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $T^3 = 0_3$ donc $\boxed{T \in \mathcal{N}_3(\mathbb{R})}$. De plus, par définition

$$\exp(T) = \frac{1}{0!}\mathrm{I}_3 + \frac{1}{1!}T + \frac{1}{2!}T^2 + \frac{1}{3!}T^3 = \mathrm{I}_3 + T + \frac{1}{2}T^2 + 0_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q39. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ semblables. Exprimer $\exp(M)$ en fonction de $\exp(N)$.

Comme M et N sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ telles que $M = PNP^{-1}$. Par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M^k = PN^kP^{-1}$. Ainsi

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} PN^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} N^k\right)P^{-1} = \boxed{P\exp(N)P^{-1}}.$$

Q40. Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère des matrices $M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies pour tout entier $i \in [\![0\,;k]\!]$ et tout entier $j \in [\![0\,;k]\!]$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{k} M_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^{k}\sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}.$$

• Pour la première égalité, partons du membre de droite et mettons le terme pour $i = 0$ de la première somme à part :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{k} M_{i,j} &= \sum_{j=0}^{k} M_{0,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{k} M_{i,j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} M_{0,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k} M_{i,j} \\ &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} M_{i,j}, \end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on remarque que la somme de gauche est le terme pour $i = 0$ de la double somme de droite.

- Pour la seconde égalité, en posant $s = i + j$ dans la seconde somme du membre de gauche, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{s=i}^{k} M_{i,s-i}\\ &= (M_{0,0} + M_{0,1} + \ldots + M_{0,k}) + (M_{1,0} + M_{1,1} + \ldots + M_{1,k-1}) + \cdots + (M_{k,0})\\ &= (M_{0,0}) + (M_{0,1} + M_{1,0}) + \cdots + (M_{0,k} + M_{1,k-1} + \ldots + M_{k,0})\\ &= \sum_{s=0}^{k}\sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}.\end{aligned}$$

Pour cette deuxième égalité, une seconde façon de voir est qu'après le changement d'indice, la double somme porte sur les indices i et s vérifiant $0 \leqslant i \leqslant s \leqslant k$, ce qui peut se réécrire $0 \leqslant s \leqslant k$ et $0 \leqslant i \leqslant s$.

Q41. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent.
En remarquant que $\exp(A)\exp(B) = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!}B^j\right)$, montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

D'après **Q32**, on a $A^n = B^n = 0_n$ donc pour tout $k \geqslant n$, $A^k = B^k = 0_n$. En particulier, on peut écrire $\exp(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!}A^k$ et de même pour B.
Alors d'une part,

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(B) &= \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!}B^j\right) = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j\\ &\overset{\textbf{Q40}}{=} \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j + \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=2n-i+1}^{2n} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j\\ &= \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j + 0_n, \qquad (\diamond)\end{aligned}$$

où la dernière double somme est nulle car soit $1 \leqslant i \leqslant n$ et alors $j \geqslant n+1$ donc $B^j = 0_n$, soit $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$ et dans ce cas $A^i = 0_n$.
D'autre part, comme A et B commutent, d'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!}(A+B)^s\\ &= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!}\sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} A^i B^{s-i}\\ &= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{\cancel{s!}}\sum_{i=0}^{s} \frac{\cancel{s!}}{i!(s-i)!} A^i B^{s-i}\\ &= \sum_{s=0}^{2n}\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{(s-i)!}B^{s-i}. \qquad (\diamond\diamond)\end{aligned}$$

Enfin, d'après la deuxième égalité de la question précédente, $(\diamond)$ et $(\diamond\diamond)$ sont égales, c'est-à-dire $\boxed{\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)}$.

Q42. En déduire que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ alors $\exp(N) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ et déterminer son inverse.

Comme les matrices N et $-N$ commutent, d'après la question précédente

$$\exp(N)\exp(-N) = \exp(N-N) = \exp(0_n) \overset{\textbf{Q37}}{=} \mathrm{I}_n.$$

En particulier, $\boxed{\exp(N) \text{ est inversible}}$ et $\boxed{(\exp(N))^{-1} = \exp(-N)}$.

Q43. On définit $E = \{\exp(M) \mid M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})\}$. L'ensemble E est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Par définition tout élément de E est de la forme $\exp(M)$ avec $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, une telle matrice est toujours inversible. En particulier, comme la matrice nulle 0_n n'est pas inversible, $0_n \notin E$ donc $\boxed{E \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$.

Q44. On dit qu'une matrice est **unipotente** si elle s'écrit comme la somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente. On note $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $E \subset \mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$.

Remarque : d'après **Q42**, on a $E \subset \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ mais ça ne sert à rien ici...

- Soit $A \in E$. Par définition de E, il existe $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \exp(M)$. Par définition, on a $\exp(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} M^k$. Or comme M est nilpotente, il en est de même pour toute matrice de la forme M^k avec $k \geqslant 1$ et donc aussi pour $\frac{1}{k!} M^k$. De plus, deux matrices de cette forme commutent car ce sont deux polynômes en M, donc d'après **Q36**, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} M^k$ est aussi nilpotente. Ainsi $A = \exp(M) = \mathrm{I}_n + N$ avec $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} M^k$ nilpotente, *i.e.* $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\boxed{E \subset \mathcal{U}_n(\mathbb{R})}$.
- Soit $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$. Par définition, $U = \mathrm{I}_n + N$ avec N nilpotente. Alors, d'après **Q33**, U est inversible. On a donc $\boxed{\mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})}$.

Remarque : C'est un peu plus difficile mais on peut montrer que $E = \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* que l'application exp réalise une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$.